



۱) نمودار معکوس تابع $f(x) = |x - 2| + 3x$ و نمودار خود تابع فقط در نقطه‌ی A متقاطع‌اند، فاصله‌ی نقطه‌ی A از مبدا مختصات کدام است؟

$\sqrt{3}$ ۴

$2\sqrt{3}$ ۳

$2\sqrt{2}$ ۲

$\sqrt{2}$ ۱

۲) تابع $f(x) = |2x - 1| - 2|x + 3|$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است. ضابطه‌ی وارون آن کدام است؟

$f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}(x + 5) ; |x| \leq 7$ ۲

$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}(x + 2) ; |x| \leq 3$ ۱

$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}(x + 2) ; |x| \leq 5$ ۴

$f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}(x + 5) ; |x| \leq 4$ ۳

۳) اگر $f(x) = -2 + \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \frac{x+3}{x+2}$ باشند ضابطه تابع $f^{-1} \circ g^{-1}$ کدام است؟

$\frac{x+1}{2}$ ۴

$\frac{x-1}{2}$ ۳

$\frac{x}{x-1}$ ۲

x ۱

۴) تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 2 & x \leq 2 \\ -\sqrt{x+2} & x > 2 \end{cases}$ یک به یک است. مجموعه‌ی مقادیرهای ممکن a کدام است؟

$\{4\}$ ۴

$(0, 4]$ ۳

$[-4, 4]$ ۲

$(-\infty, 4]$ ۱

۵) نمودار تابع $f(x) = \frac{-x+m}{3}$ در نقطه‌ای به طول ۲- نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند. ضابطه‌ی تابع وارون آن کدام است؟

$f^{-1}(x) = 3x + 8$ ۴

$f^{-1}(x) = -3x - 8$ ۳

$f^{-1}(x) = 3x - 8$ ۲

$f^{-1}(x) = -3x + 8$ ۱



۶ تابع وارون تابع $f(x) = 1 - \sqrt{4 - x}$ کدام است؟

۲ $f^{-1}(x) = -x^2 + 3x, x \leq 1$

۱ $f^{-1}(x) = -x^2 + 2x + 3, x \leq 4$

۴ $f^{-1}(x) = -x^2 + 3x, x \leq 4$

۳ $f^{-1}(x) = -x^2 + 2x + 3, x \leq 1$

۷ فرض کنید در دامنه $[0, +\infty)$ ، تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2^x + (\frac{1}{2})^x}{2}$ ، مفروض باشد. $f^{-1}(2)$ کدام است؟

۴ $\log_2(2 + \sqrt{3})$

۳ $\log_2(1 + \sqrt{3})$

۲ $\log_2(\sqrt{3} - 1)$

۱ $\log_2(2 - \sqrt{3})$

۸ اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ دو تابع باشند، برد تابع $f - (g^{-1} \circ f)$ کدام است؟

۴ $\{2, -1\}$

۳ $\{3, 4\}$

۲ $\{2, 3\}$

۱ $\{-1, 4\}$

۹ اگر $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ و $g = \{(2, 4), (3, 1), (1, 3), (4, 2)\}$ مقدار $f^{-1}(3g^{-1}(3))$ کدام است؟

۴

۳

۲

۱

۱۰ اگر $f(x) = 2x^2 - 1$ و $g(x) = \sqrt{3x + 1}$ ، ضابطه تابع وارون تابع $f \circ g$ کدام است؟

۴ $y = \frac{x-1}{6}$

۳ $y = \frac{x+1}{6}$

۲ $y = \frac{x+1}{3}$

۱ $y = \frac{x-1}{3}$

۱۱ محل برخورد وارون تابع $f(x) = 3x + |x - 1|$ با محور y ها، از نیمساز ربع دوم و چهارم چقدر فاصله دارد؟

۴ $\frac{\sqrt{2}}{4}$

۳ $\sqrt{2}$

۲ $\sqrt{3}$

۱ $2\sqrt{2}$

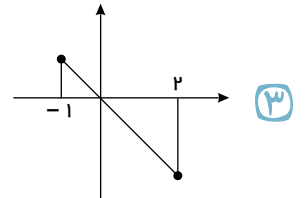
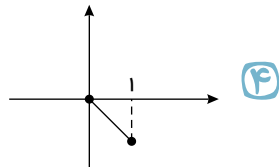
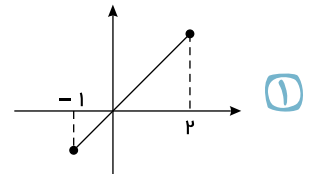
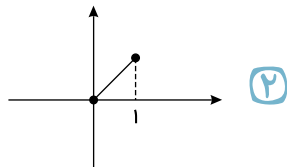
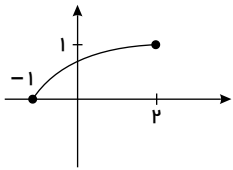


۱۲) تابع وارون تابع $f(x) = x|x| + 2x$ کدام است؟

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & x \geq 0 \\ \sqrt{x-1} & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{۲)} \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} - 1 & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x+1} + 1 & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{۱)}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & x \geq 0 \\ -\sqrt{x-1} & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{۴)} \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} + 1 & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x+1} + 1 & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{۳)}$$

۱۳) نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = (f \circ f^{-1})(x)$ کدام است؟





پاسخنامه تشریحی

۱ چون نمودار تابع و معکوش فقط یک جا همدیگر را قطع می کنند آن جا حتماً روی نیمساز ناحیه ی اول و سوم است پس کافی است معادله ی $f(x) = x$ را حل کنیم.

چون جواب قدر مطلق نا منفی است پس $x < 0$ است

$$f(x) = x \rightarrow |x - 2| + 3x = x \rightarrow |x - 2| = -2x \rightarrow -x + 2 = -2x$$

$$\Rightarrow x = -2 \xrightarrow{\text{تابع}} y = -2 \rightarrow A \Big|_{-2}$$

حال فاصله ی نقطه ی $A \Big|_{-2}$ را از مبدأ مختصات حساب می کنیم: $AO = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

۲ تابع $f(x) = |2x - 1| - |2x + 6|$ را به صورت چند ضابطه ای می نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 + 2x + 6 & x < -3 \\ -2x + 1 - 2x - 6 & -3 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1 - 2x - 6 & x > \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 7 & x < -3 \\ -4x - 5 & -3 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -7 & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

تابع با ضابطه ی $f(x) = -4x - 5$ در بازه $\left[-3, \frac{1}{2}\right]$ معکوس پذیر است.

$$y = -4x - 5 \rightarrow 4x = -y - 5 \rightarrow x = -\frac{y}{4} - \frac{5}{4} \rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}(x + 5)$$

دقت کنید که دامنه ی f^{-1} برابر برد تابع f است. پس کافی است برد تابع $y = -4x - 5$ را در بازه ی $\left[-3, \frac{1}{2}\right]$ بدست آوریم.

$$-3 \leq x \leq \frac{1}{2} \xrightarrow{\times (-4)} 12 \geq -4x \geq -2 \xrightarrow{\text{با } (-5) \text{ جمع می کنیم}} 7 \geq -4x - 5 \geq -7$$

$$\rightarrow -7 \leq y \leq 7 \rightarrow |y| \leq 7 \rightarrow D_{f^{-1}} = |x| \leq 7$$

۳ از آنجایی که $(gof)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ است، ضابطه ی تابع gof را تعیین می کنیم.

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{-2x+3}{x-1}\right) = \frac{\frac{-2x+3}{x-1} + 3}{\frac{-2x+3}{x-1} + 2} = \frac{\frac{-2x+3+3x-3}{x-1}}{\frac{-2x+3+2x-2}{x-1}} = \frac{x}{1} = x$$

چون $(gof)(x) = x$ است و معکوس تابع همانی خود تابع همانی است پس ضابطه ی $(gof)^{-1}(x)$ برابر x است.

۴ تابع چند جمله ای درجه دوم روی بازه هایی که طول رأس سهمی نمودار آن ها خارج بازه مورد نظر باشد یا ابتدای بازه یا انتهای بازه باشد، یک به یک است. در سهمی به معادله $y = a^2 - ax + 2$ طول رأس سهمی $x = \frac{a}{2}$ است. پس $\frac{a}{2} \geq 2 \Rightarrow a \geq 4$ از طرف دیگر برای

این که تابع f یک به یک باشد، باید برد تابع های $y_1 = x^2 - ax + 2$ و $y = -\sqrt{x+2}$ نباید مشترک داشته باشد. پس:

$$y_1 = x^2 - ax + 2 \Rightarrow y_1 \geq -\frac{\Delta}{4} \Rightarrow y_1 \geq \frac{8-a^2}{4} \quad (1)$$

$$y_2 = -\sqrt{x+2}, x > 2 \rightarrow \sqrt{x+2} > 2 \Rightarrow -\sqrt{x+2} < -2 \Rightarrow y_2 < -2 \Rightarrow \frac{8-a^2}{4} \geq -2 \Rightarrow 8-a^2 \geq -8$$

$$\Rightarrow a^2 \geq -8 \Rightarrow a^2 \leq 16 \Rightarrow -4 \leq a \leq 4 \quad (2)$$

با توجه به (۱) و (۲) واضح است که فقط به ازای $a = 4$ تابع f یک به یک است.



۵ ضابطه وارون تابع را به دست می آوریم.

$$y = \frac{-x+m}{3} \rightarrow 3y = -x+m \Rightarrow x = m-3y \Rightarrow f^{-1}(x) = m-3x$$

چون نمودار f و f^{-1} در $x = -2$ متقاطع اند، پس:

$$f(-2) = f^{-1}(-2) \Rightarrow \frac{2+m}{3} = m+6 \Rightarrow 2+m = 3m+18 \Rightarrow m = -8$$

بنابراین:

$$f^{-1}(x) = -8-3x$$

۶ ابتدا از تساوی $y = 1 - \sqrt{4-x}$ مقدار x را بر حسب y به دست می آوریم، تا ضابطه تابع وارون به دست آید:

$$y = 1 - \sqrt{4-x} \Rightarrow \sqrt{4-x} = 1-y \Rightarrow 4-x = (1-y)^2 \rightarrow x = 4 - (1-y)^2$$

$$x = 3 + 2y - y^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -x^2 + 2x + 3$$

اکنون توجه کنید که برد تابع f به صورت زیر به دست می آید:

$$\sqrt{4-x} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{4-x} \leq 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{4-x} \leq 1 \Rightarrow y \leq 1 \Rightarrow R_f = (-\infty, 1]$$

بنابراین $D_{f^{-1}} = (-\infty, 1]$

۷ می دانیم که $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$ است پس برای محاسبه $f^{-1}(2)$ کافی است در تابع اصلی به جای y و 2 بگذاریم.

$$2 = \frac{2^x + (\frac{1}{2})^x}{2} \rightarrow 2^x + \frac{1}{2^x} = 4 \xrightarrow{2^x=A} A + \frac{1}{A} = 4$$

$$\xrightarrow{\times A} A^2 + 1 = 4A \rightarrow A^2 - 4A + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12 \rightarrow \begin{cases} A = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} \\ A = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

می دانیم که $\log_b^a = c \rightarrow a = b^c$ است.

$$A = 2 + \sqrt{3} \rightarrow 2^x = 2 + \sqrt{3} \rightarrow x = \log_2^{2+\sqrt{3}}$$

$$A = 2 - \sqrt{3} \rightarrow 2^x = 2 - \sqrt{3} \rightarrow x = \log_2^{2-\sqrt{3}} \quad \text{غ ق}$$

توجه کنید که $\log_2^{2-\sqrt{3}}$ تقریباً معادل $\log_2^{2/3}$ است که حتماً مقدار آن منفی است و چون دامنه تابع شده بزرگتر مساوی صفر است بنابراین برد تابع معکوس نمی تواند منفی باشد.

۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\} \rightarrow g^{-1}\{(3, 2), (2, 4), (6, 5), (1, 3)\}$$

$$g^{-1} \circ f(x) : \begin{cases} g^{-1}(f(1)) = g^{-1}(2) = 4 \\ g^{-1}(f(2)) = g^{-1}(5) = \emptyset \\ g^{-1}(f(3)) = g^{-1}(4) = \emptyset \\ g^{-1}(f(4)) = g^{-1}(6) = 5 \end{cases} \rightarrow g^{-1} \circ f(x) = \{(1, 4), (4, 5)\}$$

$$\begin{cases} g^{-1} \circ f(x) = \{(1, 4), (4, 5)\} \\ f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\} \end{cases} \rightarrow g^{-1} \circ f(x) = \{(1, 4-2), (4, 5-6)\} = \{(1, 2), (4, -1)\}$$

بنابراین برد تابع به صورت $\{2, -1\}$ است.

۹ اگر $f(a) = b$ آن گاه $f^{-1}(b) = a$ و بالعکس. پس اگر فرض کنیم $f^{-1}(3g^{-1}(3)) = a$ ، آن گاه:

۱ ۲ ۳ ۴



$$f(a) = 3g^{-1}(3)$$

از طرف دیگر $g(1) = 3$ پس $g^{-1}(3) = 1$ و در نتیجه:

$$f(a) = 3 \Rightarrow \sqrt{a^2 + 1} = 3 \Rightarrow a^2 + 1 = 9 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = 2$$

پس: $f^{-1}(3g^{-1}(3)) = 2$

ابتدا ضابطه تابع fog را به دست می آوریم:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = 2g^2(x) - 1 = 2\sqrt{3x+1}^2 - 1 = 2(3x+1) - 1 = 6x+1$$

بنابراین باید تابع وارون تابع $y = 6x + 1$ را حساب کنیم:

$$y = 6x + 1 \Rightarrow y - 1 = 6x \Rightarrow x = \frac{y-1}{6}$$

بنابراین $(fog)^{-1}(x) = \frac{x-1}{6}$

با توجه به اینکه ضابطه تابع دارای قدرمطلق است، ابتدا آن را به صورت چند ضابطه ای می نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} 4x-1 & x \geq 1 \\ 2x+1 & x < 1 \end{cases}$$

محل برخورد تابع وارون با محور y ها، متناظر با نقطه برخورد تابع با محور x هاست پس باید جواب $f(x) = 0$ را به دست آوریم تا محل برخورد تابع با محور x ها معلوم شود.

$$\left. \begin{aligned} x \geq 1 \rightarrow f(x) = 4x-1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4} \times \\ x < 1 \rightarrow f(x) = 2x+1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \checkmark \end{aligned} \right\} \rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

پس محل برخورد تابع با محور x ها نقطه $A \left| -\frac{1}{2} \right|$ بود، که معادل آن روی وارون نقطه $A' \left| -\frac{1}{2} \right|$ است حالا فاصله نقطه A' را از خط $y = -x$

(نیمساز ربع دوم و چهارم) به دست می آوریم. می دانیم فاصله نقطه $A \left| \alpha \right|$ از خط $ax + by + c = 0$ از رابطه $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست

می آید با توجه به ضابطه نیمساز ربع دوم و چهارم که به صورت $y + x = 0$ است. خواهیم داشت:

$$AH = \frac{\left| 0 - \frac{1}{2} \right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

اگر $x \geq 0$ ، آن گاه $f(x) = x^2 + 2x$ ، پس:

$$y \geq 0, y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \Rightarrow (x+1)^2 = y+1 \Rightarrow |x+1| = \sqrt{y+1}$$

$$\xrightarrow{x \geq 0} x+1 = \sqrt{y+1} \Rightarrow x = \sqrt{y+1} - 1$$

اگر $x \leq 0$ آن گاه $f(x) = -x^2 + 2x$ ، پس:

$$y \leq 0, y = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1 \Rightarrow (x-1)^2 = 1-y \Rightarrow |x-1| = \sqrt{1-y}$$

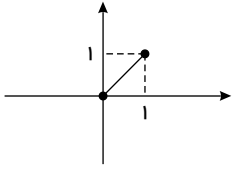
$$\xrightarrow{x \leq 0} -x+1 = \sqrt{1-y} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{1-y}$$

بنابراین تابع f^{-1} به صورت زیر است:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} - 1 & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x+1} + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$



۱۳ توجه کنید که $D_g = R_f = [0, 1]$ و $g(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$ پس نمودار تابع g به صورت زیر است. ۱ ۲ ۳ ۴



پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴

۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴

۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴

۱۳	۱	۲	۳	۴
----	---	---	---	---